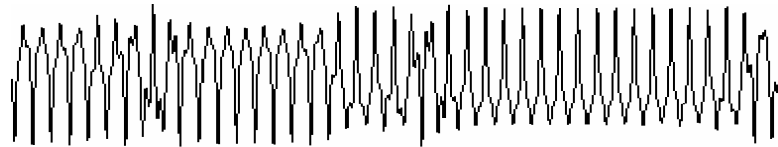


L'ANALYSE DE SERIES TEMPORELLES CHAOTIQUES



Joshua D. Reiss

Lecturer,
Queen Mary, University of London

Presenté à
DéCom, Université de Reims
6 Mai, 2003

Techniques d'analyse de séries temporelles

Statistiques

Moments

Multidimensionnel

Corrélations

Domaine Fréquentiel

Transformation de Fourier

Non stationnarité

Ondelettes

Fréquentiel

Fréquentiel multi-échelle

Domaine temporel

Théorie de l'Information

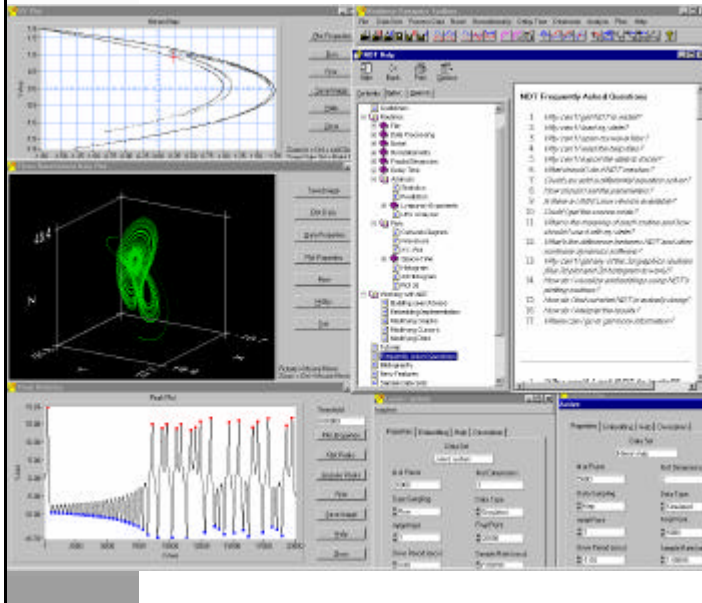
Multidimensionnel

Théorie du Chaos

Entropie

Dynamiques

Logiciel d'analyse de séries temporelles

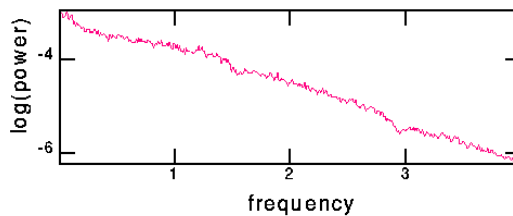


- **Traitement**
- **Analyse et Quantification**
- **Visualisation**
- **Prédiction**
- **Donnée simulées/ expérimentales**
- **Interface utilisateur**

Pourquoi pas simplement l'analyse de Fourier ?

- **Etalement du spectre de puissance (parfois confondu avec du bruit)**

Lorenz Attractor



- **Fortement non linéaire**
- **Multidimensionnel**

Plongement par la méthode des retards coordonnés

Vecteurs de données échantillonnées à pas constants

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$$

Extraction d'une dimension pour plongements

$$x_1^j, x_2^j, \dots, x_N^j$$

Nouveaux vecteurs construits avec un retard t et une dimension de plongement d

$$\bar{y}_1 = (x_1^j, x_{1+t}^j, x_{1+2t}^j, \dots, x_{1+dt}^j)$$

$$\bar{y}_2 = (x_2^j, x_{2+t}^j, x_{2+2t}^j, \dots, x_{2+dt}^j)$$

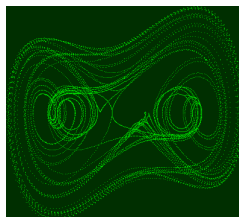
...

$$\bar{y}_{N-(d-1)t} = (x_{N-(d-1)t}^j, x_{N-(d-2)t}^j, \dots, x_N^j)$$

Reconstruction de l'espace d'état

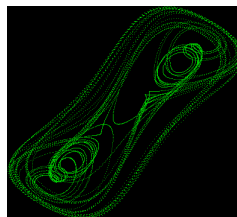


$x(t)$



Original attractor

$x(t), y(t)$



Attracteur reconstruit

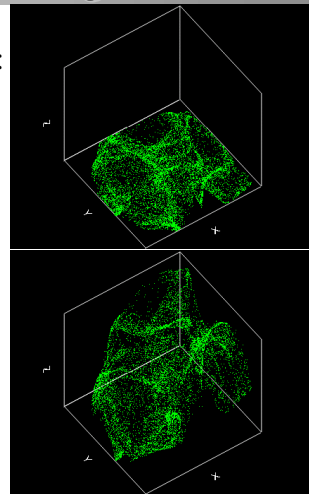
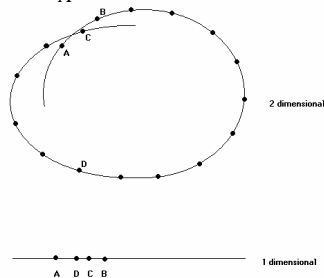
$x(t), x(t+t)$

Pour un choix convenable du retard et de la dimension de plongement, la reconstruction reproduit toutes les dynamiques originales.

Choix de la Dimension de Plongement

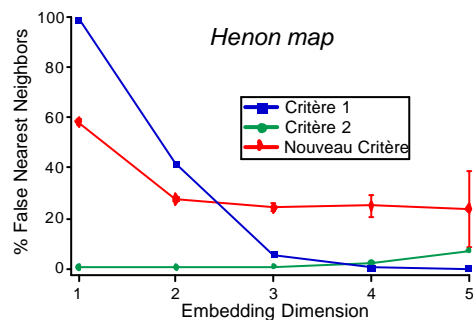
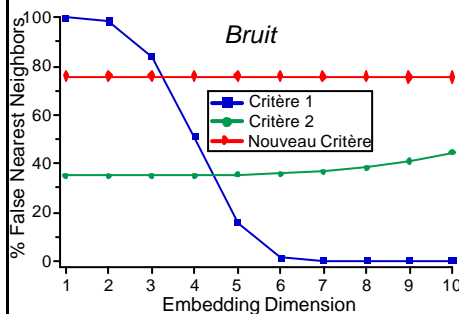
Dimension de plongement suffisante :

$$D > 2D_A$$



Pour $d < D$, intersection de la trajectoire sur elle-même.
 Pour $d \geq D$ l'attracteur est complètement déplié.
 Pour $d \gg D$, les calculs deviennent plus difficiles.

Choix de la Dimension de Plongement

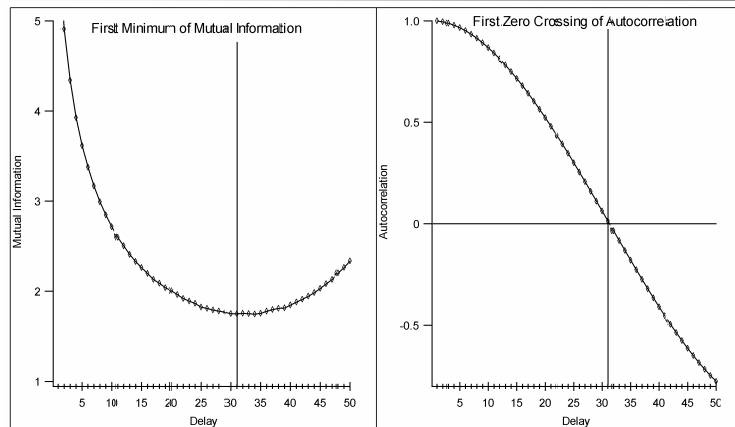


CRITÈRE 1 : $|X_{n+Dt} - X_{m+Dt}| / R_n > R_{TOL}$

CRITÈRE 2 : $R'_n / R_A > A_{TOL}$

- NOUVEAU CRITÈRE:** (1) Un faux proche voisin est situé à proximité d'un vecteur dans n dimensions, mais en est éloigné dans la $(n+1)^{th}$.
 (2) On considère le pourcentage d'entre eux sur l'ensemble des "proches" voisins.

Choix du Retard



$$I(A; B) = \sum_{a,b} P(a,b) \log \frac{P(a,b)}{P(a)P(b)}$$

$$C_L(A; B) = \frac{\sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b})}{\sum_{i=1}^N (a_i - \bar{a})^2}$$

L'information mutuelle prend en compte
les corrélations non linéaires

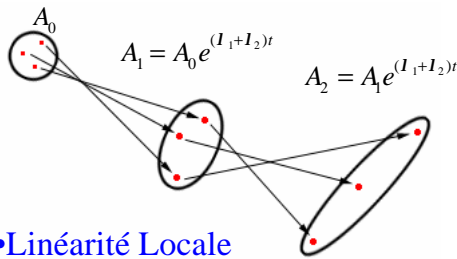
Méthodes d'Analyse de Données Multidimensionnelles

- Recherche des proches voisins
- Linéarisation
- Détermination du champ de vecteurs / Jacobienne
- Substitution / insertion de vecteurs

Utilisé pour

- ❖ Prédiction
- ❖ Débruitage
- ❖ Analyse Quantitative
 - ❖ Identification du Déterminisme
 - ❖ Estimation du bruit
 - ❖ Exposants de Lyapunov
 - ❖ Dimension d'Information
 - ❖ Identification d'Orbites Périodiques

Estimation des Exposants de Lyapunov



Dimension de Lyapunov

$$\sum_{j=1}^L I_j \geq 0$$

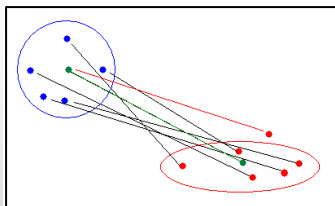
$$D_I = L + \frac{1}{|I_{L+1}|} \sum_{j=1}^L I_j$$

- Linéarité Locale
- Chercher les voisins proches
- Approximation moindres carrés

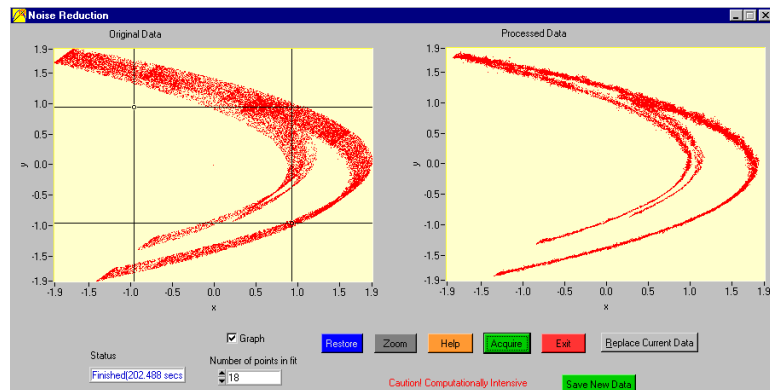
$$\sum_{I_j > 0} I_j = h_m \rightarrow \text{Liée à l'entropie métrique}$$

$$D_I \approx D_1 \rightarrow \text{Liée à la dimension d'information}$$

Débruitage

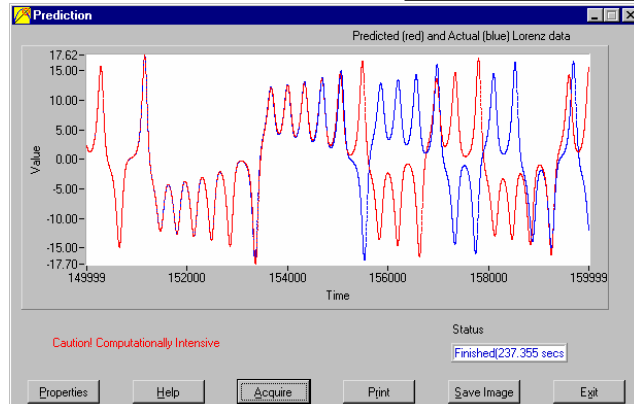
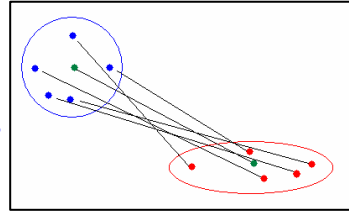


- Linéarité Locale
- Voisins proches
- Approximation moindres carrés
- Substitution de vecteurs

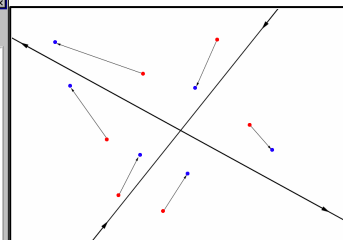
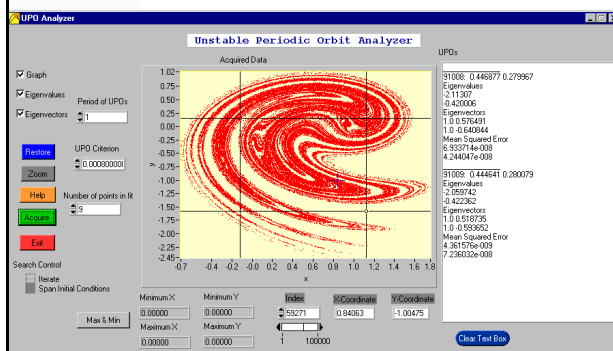


Prédiction

- Linéarité locale
- Voisins proches
- Approximation moindres carrés
- Insertion de vecteurs



Orbites Périodiques



- Linéarité locale
- Voisins proches
- Approximation moindres carrés

Le nombre d'orbites périodiques donne une estimation de l'entropie topologique.

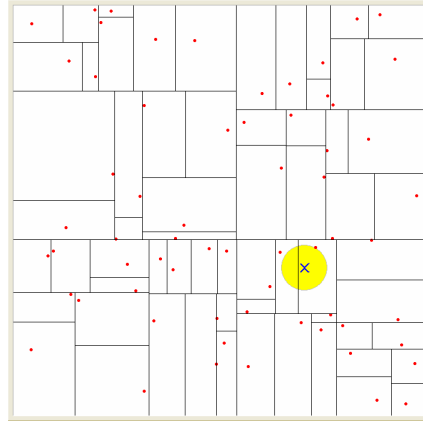
$$h_t = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log_2 N_p \geq h_m$$

Méthode de recherche multidimensionnelle

KD-Tree

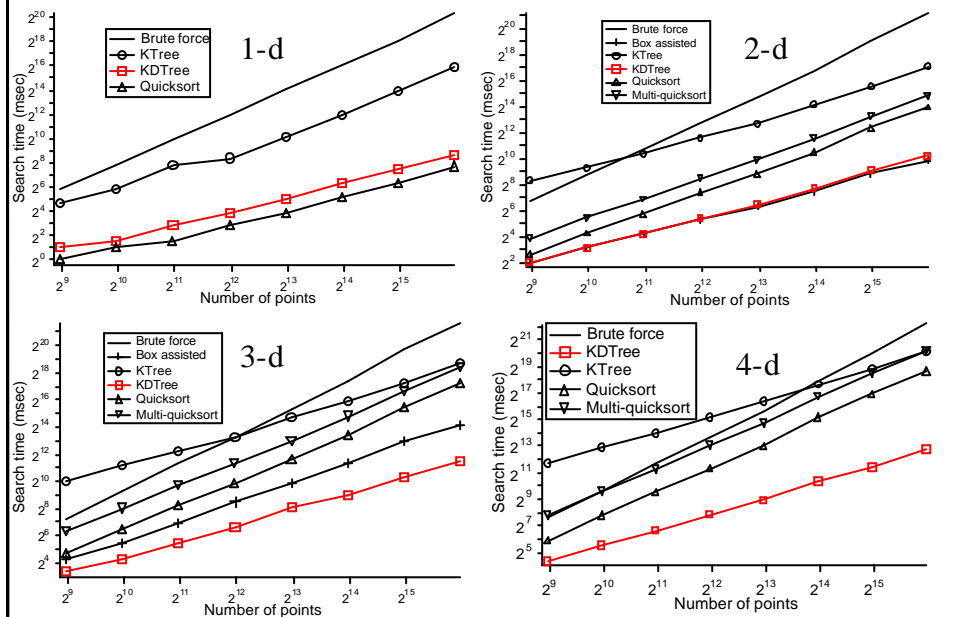
*Arbre binaire
de recherche
K-dimensionnel*

- Adaptation automatique selon la distribution
- Assez facile à implanter
- Rapide construction
- Rapide recherche



❖ Mauvais en grande dimension

Comparaison



Tri Rapide Multidimensionnel

- Mise à l'échelle des données

(boîtes équiprobables ou équidistantes)

- Trie des données

(0,1) -> (000,001) -> 00 00 01

(1,0) -> (001,000) -> 00 00 10

(0,3) -> (000,011) -> 00 01 01

(2,1) -> (010,001) -> 00 10 01

(0,7) -> (000,111) -> 01 01 01

(4,2) -> (100,010) -> 10 01 00

(4,3) -> (100,011) -> 10 01 01

(6,1) -> (110,001) -> 10 10 01

(5,5) -> (101,101) -> 11 00 11

- Balayer toutes les données, estimation de grandeurs statistiques par formules récurrentes.

- Rapide- dépendance ($n \log n$) à la taille de l'ensemble

- Simple- pas de dépendance à la taille des boîtes

- Boîtes équiprobables ou équidistantes

- Fonctionne avec tous type de données

- Econome en mémoire

- Applications

- Information Mutuelle

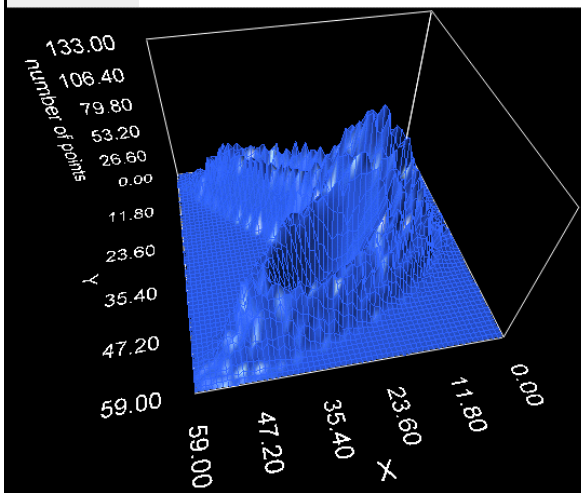
- Entropie

- Dimension Fractale

- Dynamique Symbolique / Matrices de Transition

Information Mutuelle Multidimensionnelle

Approche par Histogramme $I_n = \sum p(x_1, x_2, \dots, x_n) \log \frac{p(x_1, x_2, \dots, x_n)}{p(x_1)p(x_2)\dots p(x_n)}$



- Dépendent à la taille des boîtes

- Gaspillage de mémoire

- Inefficace pour une distribution non uniforme

- Mauvais en grande dimension

- Implantation facile

- Rapide

Tri de l'Information Mutuelle

$$I_n = \frac{nF_0(1)}{N} - \log N \quad F_m(j) = \begin{cases} 0, & N_m(j) < 2 \\ N_m(j) + \sum_{k=2^m}^{2^{j+1}} F_{m+1}(k), & N_m(j) \geq 2 \end{cases}$$

- Utilisation d'une grille d'équiprobabilité

$$P_x(B_j) = P_y(B_j) = 1/2^m$$

- Rapide

□ Aperçu de l'information partagée entre les dimensions des données.

□ Evaluation de l'efficacité du mixage, de la séparation ou de la conversion.

✓ Nombre de dimension indifférent.

✓ Ensemble quelconque de symboles (binaire, hex, oct decimal, text)

✓ Discret ou continu

✓ Différents alphabets pour chaque canal (CAN & CNA)

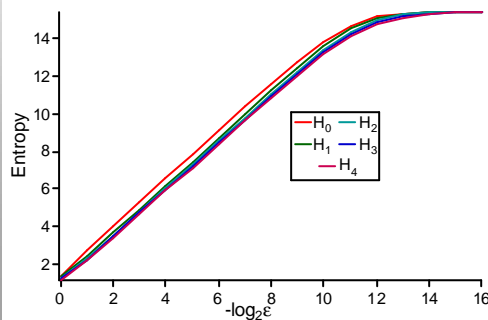
✓ Valeurs minimales et maximales ont des sens bien définis.

Estimation de la Dimension et de l'Entropie

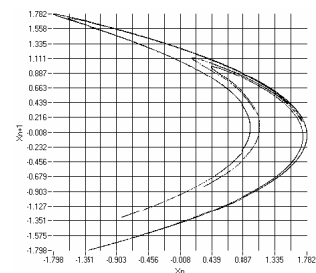
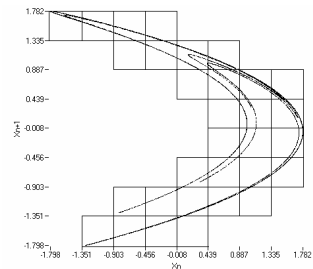
$$H_1(\mathbf{e}) = - \sum_{i=1}^{N(\mathbf{e})} P_i(\mathbf{e}) \log P_i(\mathbf{e})$$

$$H_q(\mathbf{e}) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^{N(\mathbf{e})} P_i^q(\mathbf{e}), \dots q \neq 1$$

$$D(q) = \lim_{\mathbf{e} \rightarrow \infty} -H_q(\mathbf{e}) / \log e$$



$$p > q \Rightarrow H_q \leq H_p$$



Matrice de transition et dynamiques symboliques

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$h_t = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \log \text{tr} \mathbf{M}^p$$

Séquence type : *BABCCBABACBABCBA...*

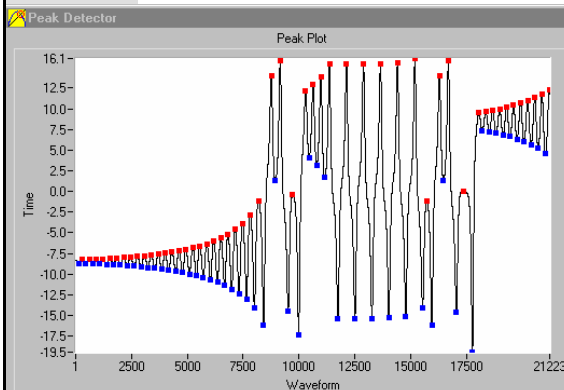
$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$h_m = \sup_b \frac{-\sum_j P(S_j(m)) \log P(S_j(m))}{m \Delta t}$$

Séquence type : *ACBCCCCBCCBACCC...*

Traitement des données

- Réduction
- Interpolation
- Lissage
- Sections de Poincaré
- ...



Peak Detection Properties

Data Set Name: Lorenz system reduced pe
Dimension: 1

Initial Point: 1
Final Point: 21223

Threshold: -90.00000
Width: 3

Detection Type: Peaks

- ▼ Peaks
 - Peak second derivatives
 - Times between peaks
 - Valleys
 - Valley second derivatives
 - Times between valleys

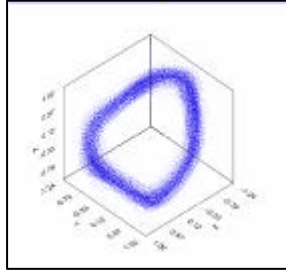
Use Original Data Use Embedded Data

La détection de pics est particulièrement utile pour

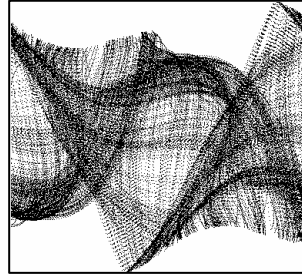
- ❖ Trains d'impulsion
- ❖ Analyse fréquentielle
- ❖ Section de Poincaré

Ensembles de données expérimentales

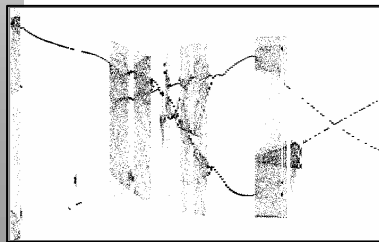
- **Brûleur intermittent**



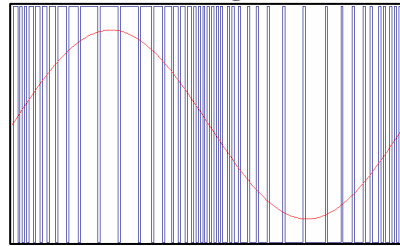
- **Moteur pas à pas**



- **Ruban magnétoélastique**



- **Modulation Sigma Delta**



Critique

Techniques d'analyse de données chaotiques très sensibles

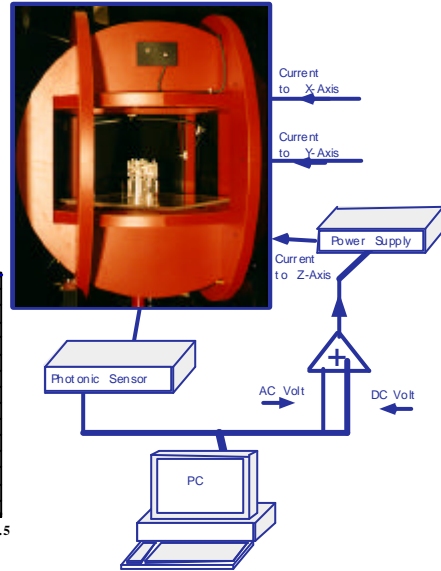
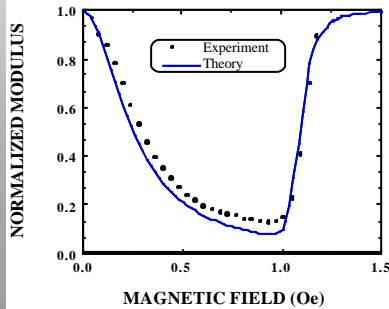
- Au bruit
- A la dérive des paramètres du système
- A la taille des données
- A l'ajustement de leurs paramètres

Validation des résultats

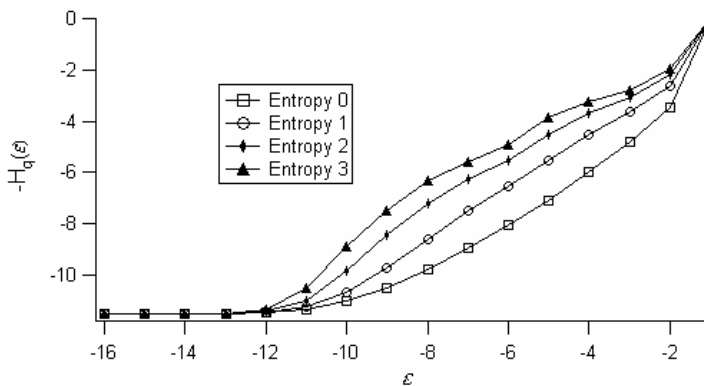
- ❖ Plusieurs méthodes d'analyse
- ❖ Concordance avec la théorie
- ❖ Analyses de sections et de flots

Ruban Magnétoélastique

- Dynamiques riches
- Grande précision
- Haute sensibilité
- Stabilisation de la Température/Vibrations



Dimension fractale



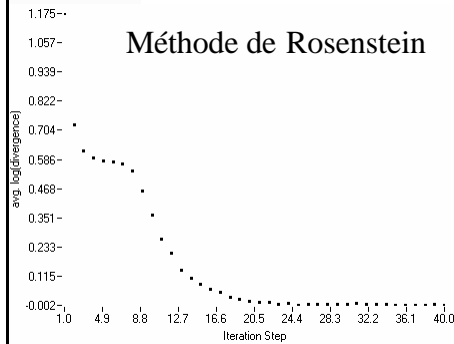
$$D_0 = 1.33, D_1 = 1.40, D_2 = 1.24 \text{ and } D_3 = 1.16$$

$$p > q \Rightarrow D_q \leq D_p ?$$

\Rightarrow Dimension de plongement : 3

\Rightarrow 2 exposants significatifs

Exposants de Lyapunov



Méthode de Rosenstein

Méthode de Wolf

▶ $\lambda_1 = 0.66$

Méthode de Rosenstein

▶ $\lambda_1 = 0.6$

Méthode d'Eckmann-Ruelle

▶ $\lambda_1 = 0.45996$

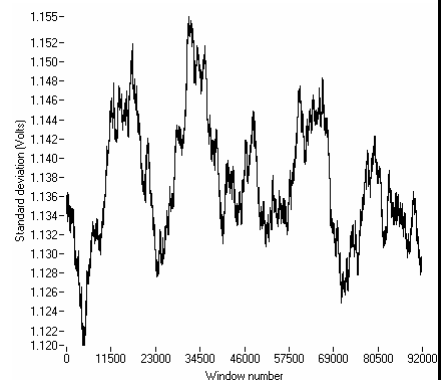
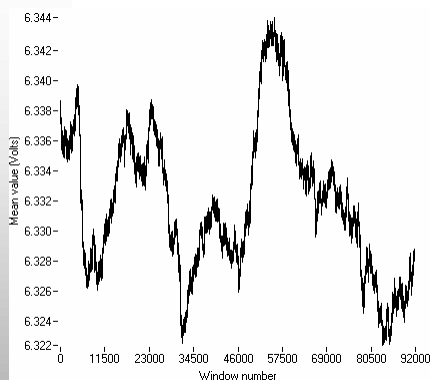
▶ $\lambda_2 = -0.471613$

Dépendent de

- Méthode
- Interprétation
- L'ajustement de leurs paramètres de plongement
- Approximations
- Taille des données
- Bruit
- Dérive des paramètres du système
- ...

Ruban

Non stationnarité et dérive des paramètres

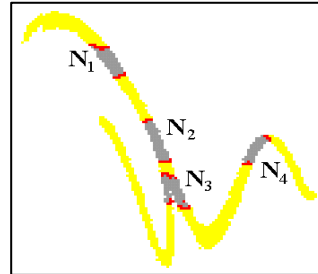
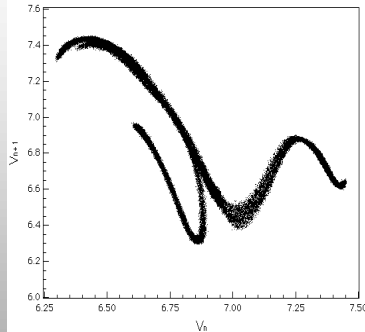


Mis en évidence par beaucoup de grandeurs statistiques (skewness, kurtosis, max and min,...)
Dynamiques à long terme possibles

Ruban

Dynamiques symboliques

$N_4 \rightarrow N_1 \rightarrow N_3 \rightarrow N_2 \rightarrow N_2 \rightarrow N_2 \rightarrow N_4 \rightarrow N_1 \rightarrow N_3 \rightarrow N_4 \rightarrow N_1 \rightarrow \dots$

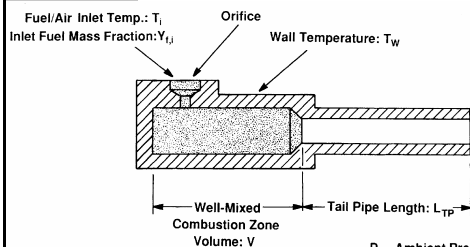


Matrice de transition :

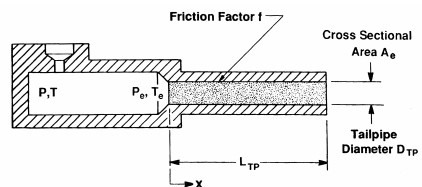
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ruban

Brûleur intermittent



$P_o =$ Ambient Pressure
 $\rho_o =$ Ambient Density

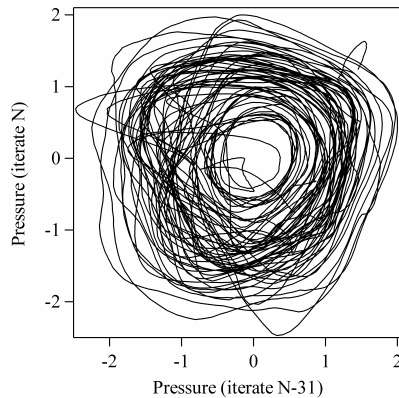


Ambient Pressure And Temperature: P_o, T_o

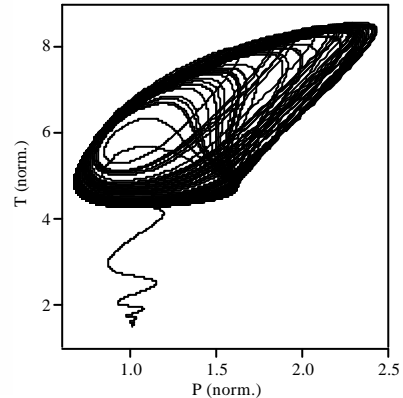
Combustion Zone Control Volume

Tailpipe Control Volume

Sortie de flamme !



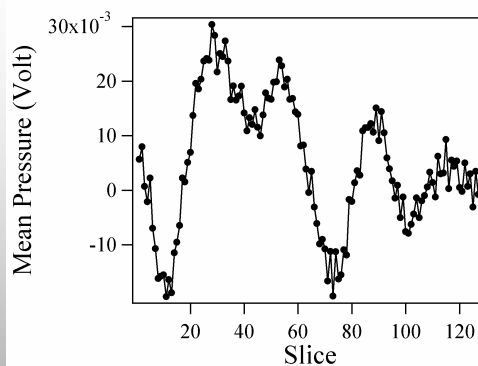
Expérimental
rapport fuel/air > C



Simulation
rapport fuel/air < C

Brûleur

Non stationnarité et dérive des paramètres



Comportement non stationnaire de la moyenne.

La valeur moyenne varie jusqu'à 3% de la dynamique totale

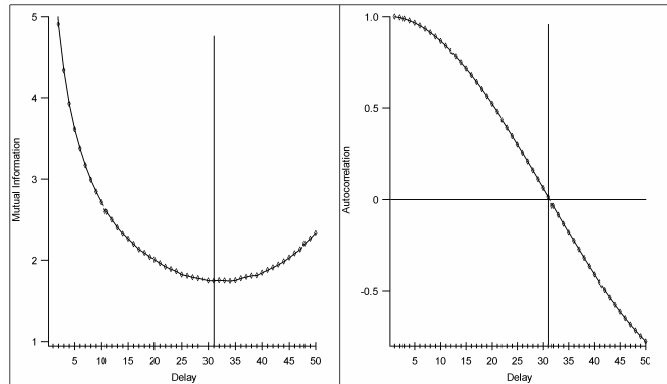
Causes possibles

- Dérive des paramètres
- Dynamiques à long terme
- Grande dimension
- Bruit

128 fenêtres de longueur $2^{13}=8,192$

Brûleur

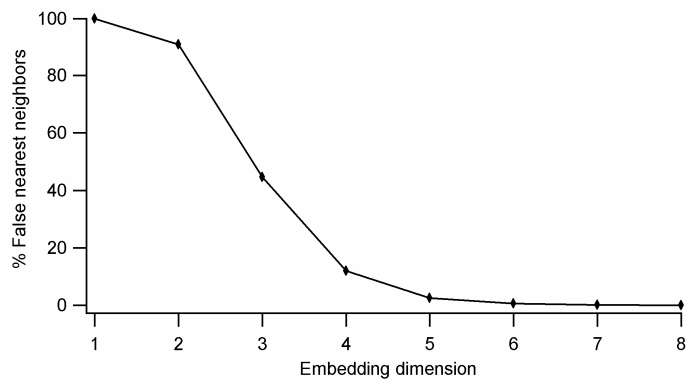
Temps de retard



- Forte coïncidence entre les méthodes
- Sensibilité minimale au bruit et/ou à la complexité

Brûleur

Dimension de plongement

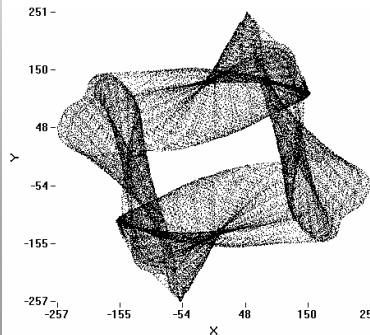


- Dégadé par le bruit et la non stationnarité
- Peu concluant car :
 - Technique d'analyse mal adaptée
 - Ou (exclusif)*
 - Résultats correct mais dimension élevée

Brûleur

Moteur pas à pas

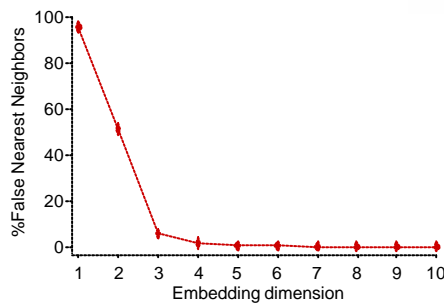
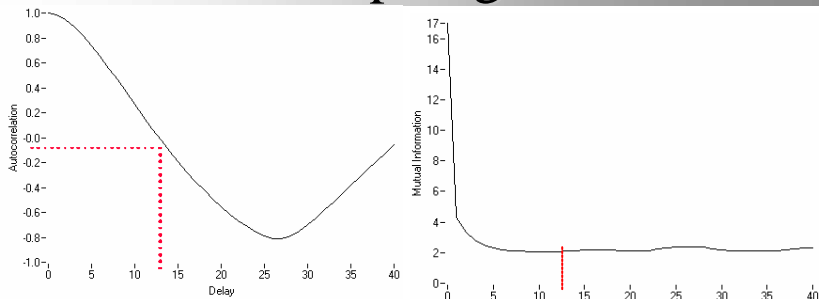
- Moteur hybride, 48 pas/tour, à vide.
- En basse fréquence, vitesse de rotation proportionnelle à la fréquence d'alimentation.



Mais en haute fréquence...

Projection de l'attracteur plongé (acquisition de courants)

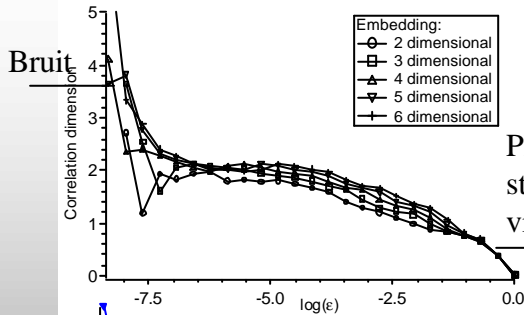
Paramètres de plongement



Dimension de plongement : 4 ou 5
Retard : 13

Moteur pas à pas

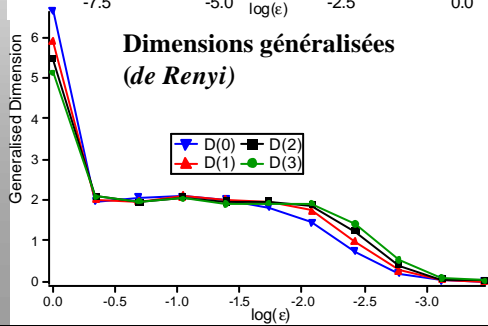
Estimation de la dimension fractale



$$1.9 \leq D \leq 2.2$$

Plus de structure visible

Faible dimension



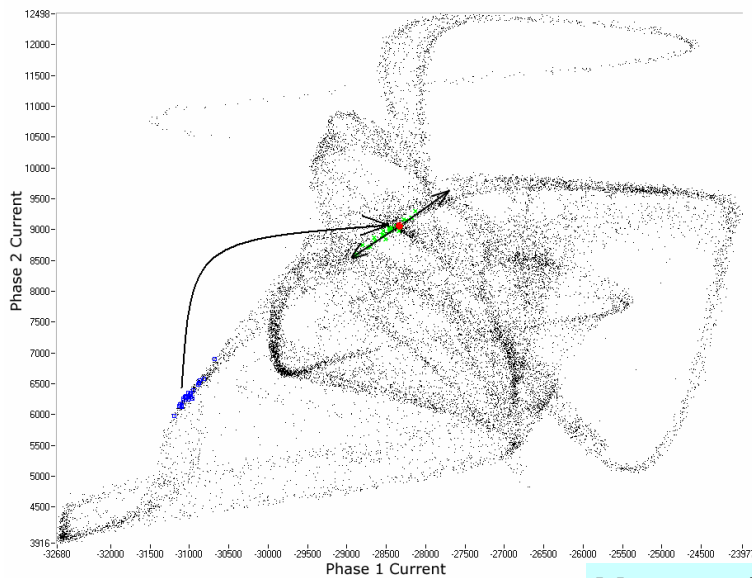
Dimensions généralisées (de Renyi)

● Bonne concordance des méthodes

● Concordance avec les faux plus proches voisins

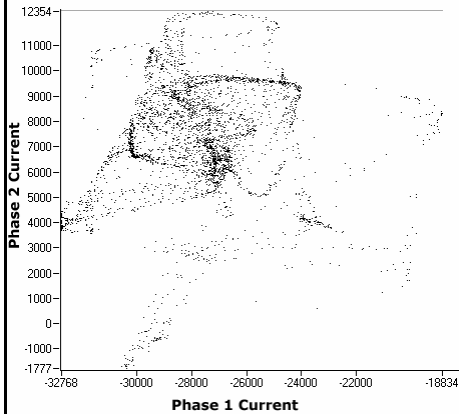
Moteur pas à pas

Orbites Périodiques Instables

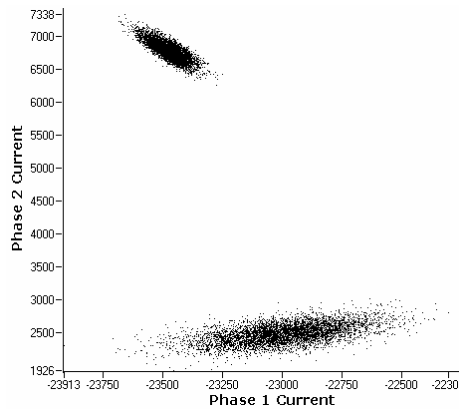


Moteur pas à pas

Coexistence d'Attracteurs



- Attracteur chaotique
 - 4000 points

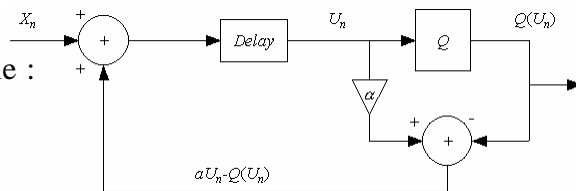


- Coexistence d'Attracteurs périodiques
 - 10000 points

Moteur pas à pas

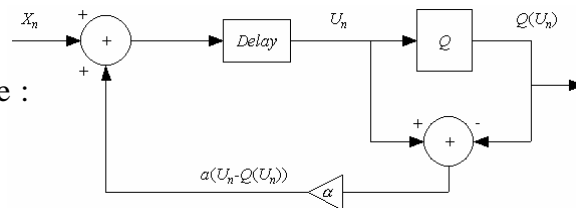
Modulation Sigma Delta Chaotique

Forme habituelle :



$$U_n = aU_{n-1} + X_{n-1} - Q(U_{n-1})$$

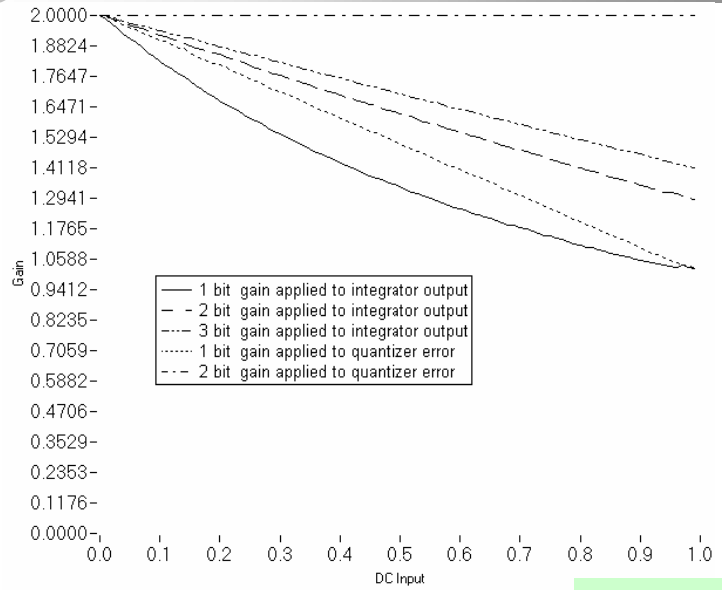
Nouvelle forme :



$$U_n = X_{n-1} + a(U_{n-1} - Q(U_{n-1}))$$

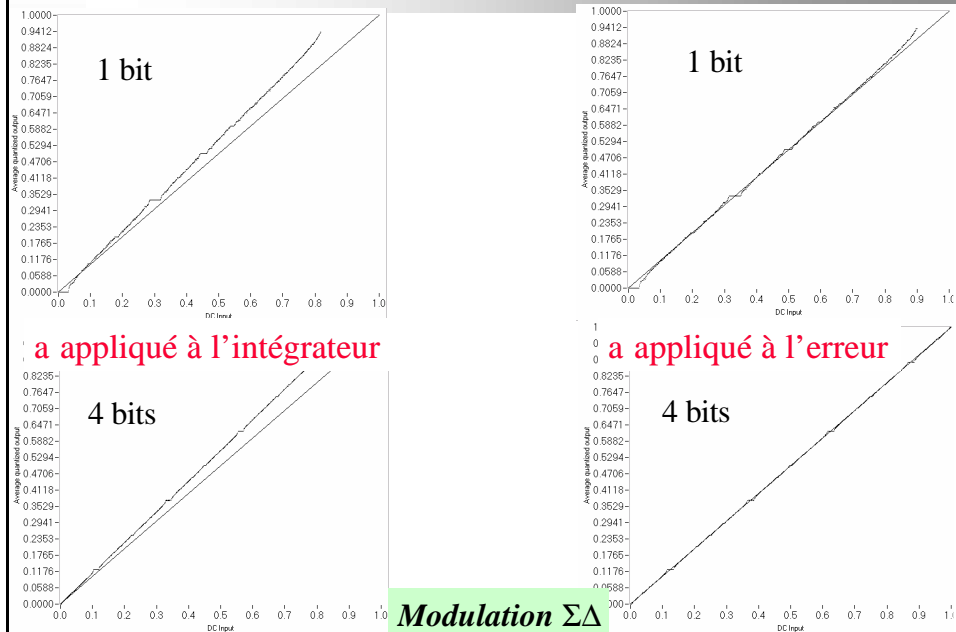
Modulation $\Sigma\Delta$

Régime stable



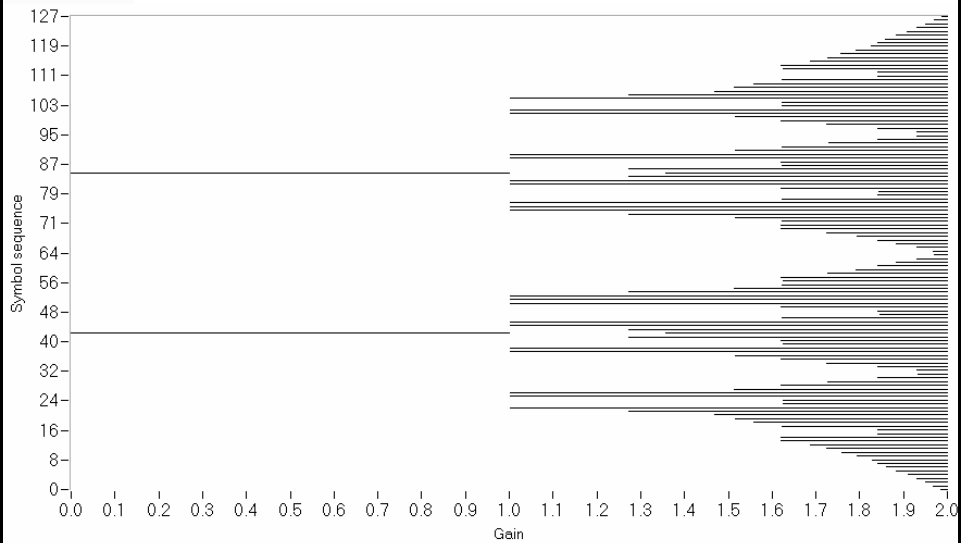
Modulation $\Sigma\Delta$

Gain en marches d'escalier



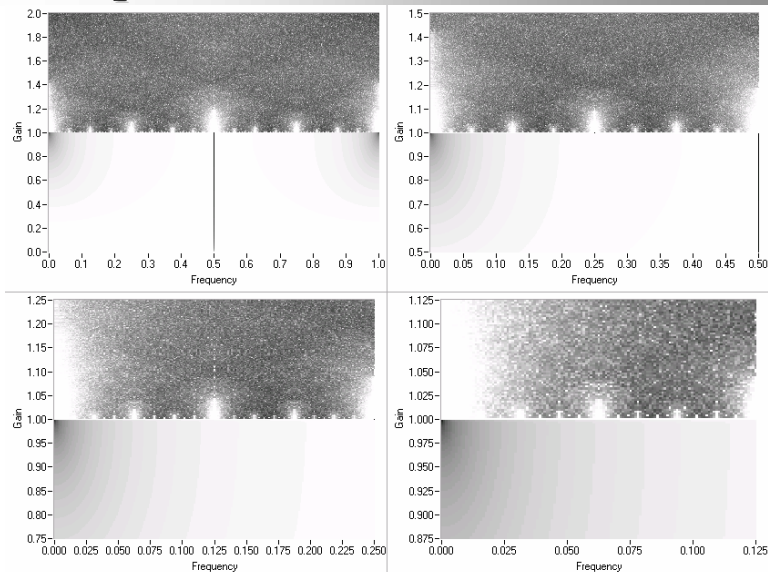
Modulation $\Sigma\Delta$

Séquences autorisées de symboles 7-bits



Modulation $\Sigma\Delta$

Spectre en puissance – fractal!



Modulation $\Sigma\Delta$

Fin

Merci Beaucoup!

Questions ?